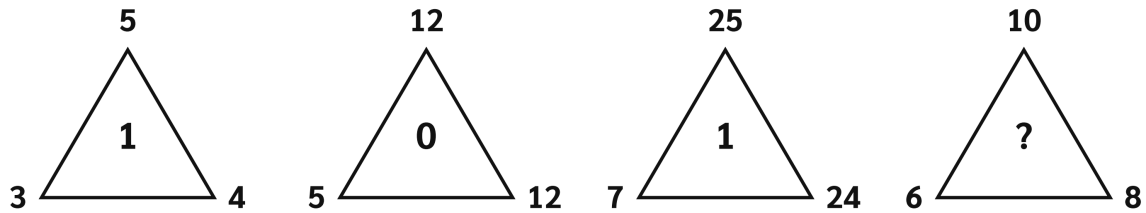


1. ตัวเลขในตำแหน่งสัญลักษณ์ ? ตรงกับข้อใดต่อไปนี้



1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

2. ลูกเต๋ามาตรฐานลูกหนึ่งวางโดยหน้าแต้ม 1 อยู่ด้านบน หน้าแต้ม 3 หันไปทางขวา (E) และหน้าแต้ม 2 หันไปด้านหลัง (N) ถ้ากลิ้งลูกเต๋ไปตามทิศ $\rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \downarrow \rightarrow$ (รวม 6 ครั้ง) เมื่อหยุดแล้ว หน้าบน เป็นแต้มใด

(ผลรวมแต้มของหน้าตรงข้ามกันเท่ากับ 7 เสมอ)

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

3. ดาวเคราะห์ทรงกลมความหนาแน่นสม่ำเสมอ รัศมี R มีความเร่งโน้มถ่วงที่ผิวเท่ากับ g เจาะอุโมงค์เป็นเส้นตรงผ่านศูนย์กลางทะลุถึงผิวอีกด้านหนึ่ง ปล่อยลูกปัดมวล m จากผิวด้านหนึ่งโดยไม่มีความเร็วต้น (ไม่มีแรงต้านใด ๆ และดาวไม่หมุน) พบว่าลูกปัดเคลื่อนที่แบบ **ซิมเปิลฮาร์โมนิก** คล้ายกับมวลติดสปริง ลูกปัดจะใช้เวลานานเท่าใดนับจากปล่อย จนกระทั่งโผล่พ้นผิวอีกด้านหนึ่งเป็นครั้งแรก

1. $\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

2. $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

3. $\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

4. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$

5. $\sqrt{\frac{R}{g}}$

4. กระจาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแผ่นหนึ่งวางลอยอยู่ในปริภูมิสามมิติ ทราบพิกัดของจุดยอดเพียง 3 จุด คือ $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 0, 3)$ และ $C = (2, 3, 1)$ โดยทั้งสามจุดนี้ **มิได้เรียงตามลำดับรอบรูป** จงหาพิกัดของจุดยอดที่ 4

1. $(4, 2, 3)$

2. $(0, 4, -1)$

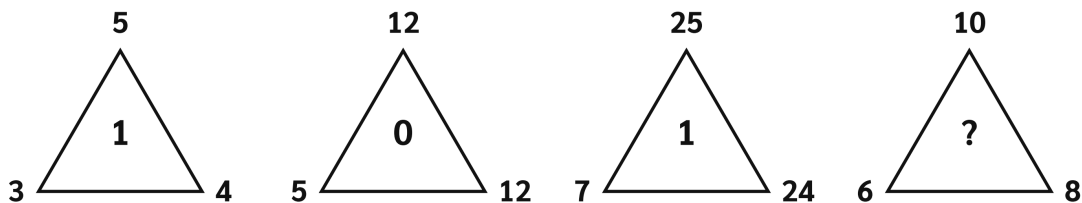
3. $(2, -2, 3)$

4. $(5, 3, 4)$

5. $(2.5, 1.5, 2)$

เฉลยละเอียด

ข้อที่ 1 ตอบ 2



Key พอมองเลขมุมสามเหลี่ยมเป็นชุดคั่น ๆ อย่าง **3, 4, 5** กับ **7, 24, 25** ที่ดูเหมือนอัตราส่วนสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้ลองเช็คดูว่าแพตเทิร์นของแต่ละรูปมันเกี่ยวกับ **พีทาโกรัส** หรือเปล่า

Step 1 จับกฎจากสามรูปที่โจทย์ให้

รูปที่ 1 : ล่าง **3, 4, 5** – เข้าพีทาโกรัส ได้ 1 $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 \Rightarrow 1 \checkmark$

รูปที่ 2 : ล่าง **5, 12, 12** – ไม่เข้า ได้ 0 $5^2 + 12^2 = 169 \neq 144 = 12^2 \Rightarrow 0 \checkmark$

รูปที่ 3 : ล่าง **7, 24, 25** – เข้า ได้ 1 $7^2 + 24^2 = 625 = 25^2 \Rightarrow 1 \checkmark$

กฎตรงทั้งสามรูป $\Rightarrow$ เลขกลางคือ “เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากไหม” (1 ใช่ / 0 ไม่ใช่)

Step 2 ใช้กฎกับรูปสุดท้าย

รูปสุดท้าย ล่าง **6, 8, 10** – เช็คพีทาโกรัส $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

ได้ $100 = 10^2$ พอดี เป็นมุมฉาก เลขกลางจึงเป็น

$$? = 1$$

สรุปได้ว่า $? = 1 \rightarrow$ ตอบ **Choice 2**

ข้อที่ 2 ตอบ 3

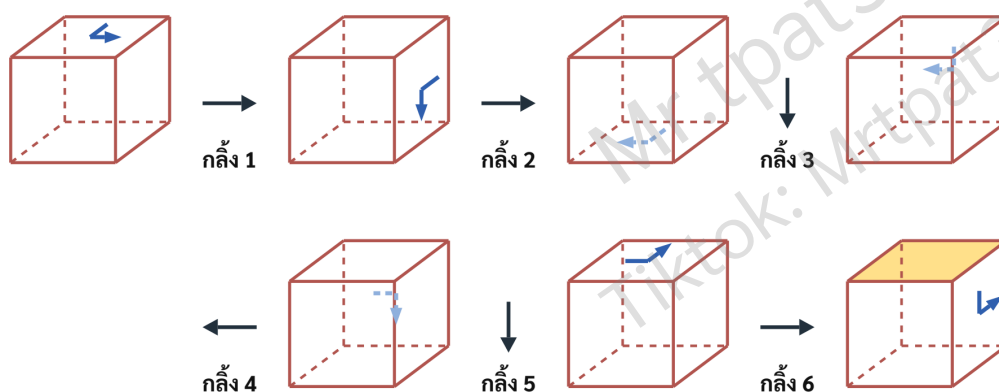
โจทย์ ลูกเต๋าลูกหนึ่งวางโดยหน้าแต้ม 1 อยู่ด้านบน หน้าแต้ม 3 หันไปทางขวา (E) และหน้าแต้ม 2 หันไปด้านหลัง (N)
ถ้ากลิ้งลูกเต๋ไปตามทิศ $\rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \downarrow \rightarrow$ (รวม 6 ครั้ง) เมื่อหยุดแล้ว หน้าบน เป็นแต้มใด

Key เจอโจทย์ลูกเต๋ากลิ้งหลายจังหวะ อย่าหมุนรูปในหัว เพราะโอกาสตาลายแล้วหมุนพลาดมีสูงมาก - ให้ ยึดไว้แค่หน้าเดียว แล้วค่อย ๆ วาดการกลิ้งทีละ Step ไป

Step 1 ตั้งรหัสลูกศร (ตามลูกเต๋าด้านหน้า 1)

ให้ลูกเต๋าด้านหน้า 1 ถือลูกศรไว้: หัวชี้หาเลข 3 (ขวา/E) และ หางชี้หาเลข 2 (หลัง/N) - พอกลิ้งก็ตามลูกศรของลูกเต๋าด้านหน้า 1 ไปพอ ไม่ต้องหมุนทั้งลูก

Step 2 กลิ้งตามทิศทีละครั้ง (ดูรูป)



กลิ้ง $\rightarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \downarrow \rightarrow$ แล้วตามรอยลูกเต๋าด้านหน้า 1 ไปทีละจังหวะตามรูป

Step 3 อ่านคำตอบ

จบการกลิ้งแล้ว ทางลูกศรชี้ไปทางเลข 2 หน้าบนจึงเป็นแต้ม 2

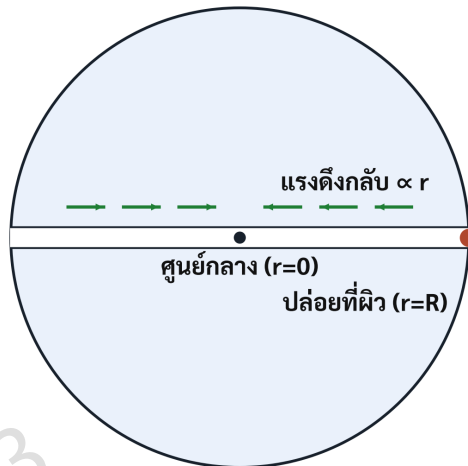
$$n_{\text{top}} = 2$$

ถ้าเจอกรณีหน้าบนไม่ใช่ 1, 2, 3 ก็ใช้กฎ ด้านตรงข้ามรวมกันได้ 7 แล้วหาว่าตรงข้ามของหน้าบนเป็นเลขอะไร

สรุปได้ว่า $n_{\text{top}} = 2 \rightarrow$ ตอบ Choice 3

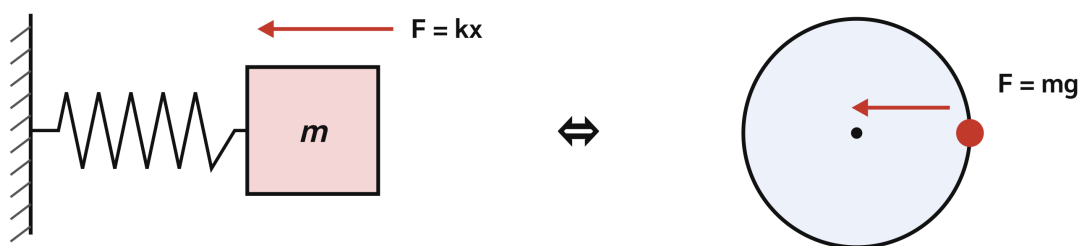
ข้อที่ 3 ตอบ 1

โจทย์ ดาวความหนาแน่นสม่ำเสมอ รัศมี R ความเร่งที่ผิว g เจาะอุโมงค์ผ่านศูนย์กลาง ปลอยลูกปัดจากผิว พบว่าลูกปัดเคลื่อนที่กลับไปกลับมาแบบ Simple Harmonic คล้าย Spring จงหาเวลาที่ลูกปัดโผล่พ้นผิวอีกด้านเป็นครั้งแรก



Key ค่า k ก็คือ แรงดึงกลับที่เพิ่มขึ้นตามระยะที่ดึงสปริง พอโจทย์บอกว่าลูกปัดเคลื่อนที่แบบ Simple Harmonic คล้ายสปริง เราก็แค่หาให้เจอว่า อะไรคือค่า k ของลูกปัด ก็จบ และอย่าลืมว่าโจทย์ถามแค่ ไปถึงผิวอีกด้านเที่ยวเดียว ไม่ใช่หนึ่งคาบเต็ม ตอนท้ายเลย ต้องหารสอง

Step 1 หา “ค่า k ของดาว” ด้วยการเทียบที่จุดไกลสุด



สปริงที่ยืดสุด x มีแรงดึงกลับ kx ส่วนลูกปัดที่ผิวดาว (ระยะไกลสุด $= R$) มีแรงดึงกลับ $kR = mg \implies k = \frac{mg}{R}$
 $= mg$

Step 2 แทนลงสูตรคาบ แล้วเอาครึ่งเดียว

แทน k ลงในสูตรคาบสปริง

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/R}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

โจทย์ถามเวลาจากผิวหนึ่งไปผิวอีกด้าน = ครึ่งคาบพอดี

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

แถม: แทนค่าโลกได้ราว 42 นาที

สรุปได้ว่า $t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \rightarrow$ ตอบ Choice 1

ข้อที่ 4 ตอบ 1

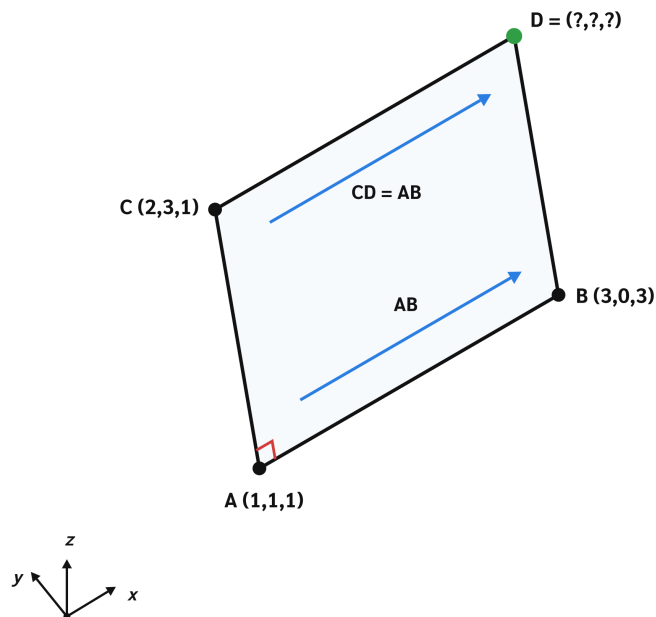
โจทย์ สี่เหลี่ยมผืนผ้าในปริภูมิ 3 มิติ มีจุดยอด $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 0, 3)$, $C = (2, 3, 1)$ (ไม่ได้เรียงตามลำดับรอบรูป) จงหาจุดยอดที่ 4

Key โจทย์ให้ 3 มุมแต่ไม่บอกว่าเรียงยังไง – เคล็ดลับคือ หา “หัวมุม” (จุดที่เป็นมุมฉาก) ให้เจอก่อน ด้วยการคูณจุด (dot product) แล้วที่เหลือ้ง่ายมาก

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

กับดักคือ โจทย์ยั่วว่า “ไม่ได้เรียงตามลำดับ” – ใครเผลอคิดแบบเรียงลำดับด้าน A, B, C ไปตรง ๆ จะได้คำตอบที่ผิด ซึ่งมี ข้อยรอดักอยู่

Step 1 หาว่าจุดไหนเป็นมุมฉาก



พื้นผิวมีมุมฉากทุกมุม เช็กก่อนว่าจุดไหนคือมุมฉาก โดย ลากเวกเตอร์ 2 เส้นจากจุดนั้นมาคูณจุด (dot) ถ้าได้ 0 ก็คือตั้งฉาก จุดนั้นคือมุมฉาก

ลองเริ่มที่ A : ลาก $\vec{AB}$ กับ $\vec{AC}$ ออกไป

$$\vec{AB} = (2, -1, 2), \quad \vec{AC} = (1, 2, 0)$$

คูณจุดแล้วได้ 0 พอดี $\Rightarrow$ ตั้งฉากกัน $\Rightarrow A$ คือมุมฉาก (ถ้าไปลองที่ B หรือ C จะไม่ได้ศูนย์)

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 - 2 + 0 = 0 \checkmark$$

Step 2 หาจุดยอดที่ 4

หลักคือ จุดเริ่ม + เวกเตอร์ของขอบ = จุดปลายของขอบ เช่นเดินจาก A ไปตามขอบ $\vec{AB}$ ก็ถึง B - ทำนองเดียวกัน ถ้าเดินจาก C ไปตามขอบ $\vec{CD}$ ก็จะถึงจุดที่เราต้องการคือ D เหลือแค่รู้ว่า $\vec{CD}$ คือเวกเตอร์อะไร

ขอบ AB กับ CD เป็น ด้านตรงข้ามของพื้นผิวเดียวกัน

ยาวเท่ากันและชี้ไปทางเดียวกัน จึงเป็นเวกเตอร์ตัวเดียวกันเป๊ะ

$$\vec{CD} = \vec{AB} = (2, -1, 2)$$

แทนกลับในสูตร $D = C + \vec{CD}$ แล้วบวกทีละช่อง

$$D = (2, 3, 1) + (2, -1, 2) = (4, 2, 3)$$

เช็กซ้ำที่มุม C : $\vec{CA} \cdot \vec{CD} = (-1, -2, 0) \cdot (2, -1, 2) = 0$ ตั้งฉากจริง เป็นพื้นผิวนั่นเอง $\checkmark$

สรุปได้ว่า $D = (4, 2, 3) \rightarrow$ ตอบ Choice 1